

05/05 П.3. Метод Баланса (метод
объемов) (Интерпо-интерполяционный
метод)

§ диффр. зад.:

$$\left[\begin{aligned} & -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f, \quad 0 < x < 1, \\ & u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1, \quad p(x) > 0, \quad q(x) > 0 \end{aligned} \right] (*) - \text{это}$$

стационар. ур-е теплопровод-ти в диффр

форме. Вспомним, что этот вид полу-
-ся из "интеграл." ур-а:

$$\left[-p(x) \frac{du}{dx} \Big|_{x+\Delta x} + p(x) \frac{du}{dx} \Big|_x + \int_x^{x+\Delta x} q(x) u dx = \int_x^{x+\Delta x} f dx, (**) \right]$$

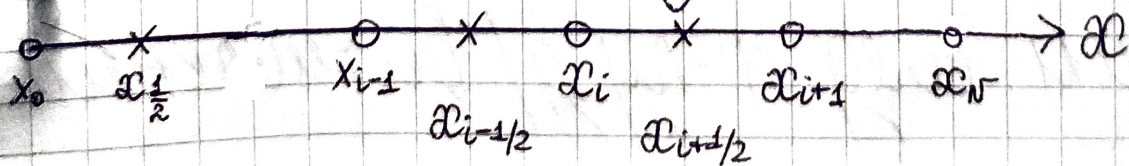
Δ описывает баланс "тепла" на отрезке $[x, x+\Delta x]$. Здесь: $(-p(x) \frac{du}{dx})$ — плотность теплового потока (закон Фурье); $q(x)u(x)$ — удельный теплособлюд (закон Ньютона); f — удельные источники энергии.

Одним из частых примеров построения разностн. схемы явл-ся аппр-ция "интеграл-а" формы, а не дифер-й.

Метод Баланса

Введем на отрезке $[0, 1]$ 2 сетки:

$\{x_i: x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = 1/N\}$ и $\{x_{i+1/2}: x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}, i = \overline{0, N-1}\}$ — сетку с "целыми" точками и сетку с "полуцелыми" точками.



Принтегрируем ур-е (*) на отрезке $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$:

$$-p(x_{i+1/2})u'(x_{i+1/2}) + p(x_{i-1/2})u'(x_{i-1/2}) =$$

$$= \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [f - g(x)u] dx \quad (\text{это ур-е в точности соотв. УУ (***) на отрезке } [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \text{ и описывает баланс тепла на этом отрезке})$$

Замена

- 1) $p(x_{i\pm 1/2})$ на $a_{i\pm 1/2}$ (некоторая аппроксимация);
- 2) $u'(x_{i+1/2})$ на $\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = y_{xi}$;
- 3) $u'(x_{i-1/2})$ на $\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = y_{xi}$;
- 4) $\int$ в прав. части — на формулу прямоугольников (или в другую квадратичную формулу): $\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [f - g(x)u] dx \sim [\psi(x_i) - d_i y_i] h$
- 5) формулы прямоугольников: $\psi(x_i) = f(x_i)$, $d_i = g(x_i)$

Получим след. формулу для вычислений —

- разност. схему:

$$\left[-\frac{1}{h} \left[a_{i+1/2} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_{i-1/2} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] + d_i y_i = \varphi_i \right] -$$

- это общий вид, или:

$$\left[- (a_{i+1/2} y_x)_{\bar{x}_i} + \varphi_i y_i = f_i \right]$$

Здесь a_i и φ_i выбраны из ф-лы правых членов

Эта схема построена методом баланса. Эта схема консервативна, т.е. в разностном (дискретном) случае выполнен закон сохранения, справедливый в дифф-но-интеграл-но случае.

Исследуем ее св-ва.

Погрешность аппр-ции

$$\Phi_i = (Lu)_h - L_h(u)_h - (f)_h + f_h$$

$$\begin{aligned} 1) (Lu)_h - (f)_h &= - (pu')'_i + \varphi_i u_i - f_i = \\ &= -p'_i u'_i - p_i u''_i + \varphi_i u_i - f_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) L_h(u)_h &= - \left[a_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - a_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right] \frac{1}{h} + \\ &+ d_i u_i \end{aligned}$$

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} = \frac{u_i + u_i' h + \frac{u_i'' h^2}{2} + \frac{h^3}{6} u_i''' + O(h^4) - u_i}{h} =$$

$$= u_i' + \frac{h}{2} u_i'' + \frac{h^2}{6} u_i''' + O(h^3)$$

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h} = u_i' - \frac{h}{2} u_i'' + \frac{h^2}{6} u_i''' + O(h^3)$$

3) Тогда:

$$L_h(u_h) = - \left[(a_{i+1/2} - a_{i-1/2}) u_i' + \frac{h}{2} u_i'' (a_{i+1/2} + a_{i-1/2}) + \right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{6} (a_{i+1/2} - a_{i-1/2}) u_i''' \right] \frac{1}{h} + d_i u_i + O(h^2) =$$

$$= - \frac{a_{i+1/2} - a_{i-1/2}}{h} u_i' - \frac{a_{i+1/2} + a_{i-1/2}}{2} u_i'' - \frac{h}{6} (a_{i+1/2} - a_{i-1/2}) u_i''' +$$

$$+ d_i u_i + O(h^2)$$

4) Подставляя эти выражения в выражение g /получим-ту аппр-цию:

$$\Phi_i = - p_i' u_i' - p_i u_i'' + q_i u_i - f_i + \frac{(a_{i+1/2} - a_{i-1/2}) u_i'}{h} +$$

$$+ \frac{a_{i+1/2} + a_{i-1/2}}{2} u_i'' + \frac{h}{6} (a_{i+1/2} - a_{i-1/2}) u_i''' - d_i u_i + u_i +$$

$$+ O(h^2) = u_i' \left[-p_i' + \frac{a_{i+1/2} - a_{i-1/2}}{h} \right] + u_i'' \left[-p_i + \right.$$

$$\left. + \frac{a_{i+1/2} + a_{i-1/2}}{2} \right] + \frac{h}{6} (a_{i+1/2} - a_{i-1/2}) u_i''' + u_i (q_i - d_i) +$$

$$+ (-f_i + u_i) + O(h^2)$$

III. а, упр-а 220 пер-ка аппр-ции

$$\frac{a_{i+1/2} - a_{i-1/2}}{h} = p_i' + \underline{O}(h^2), \quad (1)$$

$$\frac{a_{i+1/2} + a_{i-1/2}}{2} = p_i + \underline{O}(h^2), \quad (2)$$

$$a_{i+1/2} - a_{i-1/2} = \underline{O}(h), \quad (3)$$

$$d_i = q_i + \underline{O}(h^2), \quad (4)$$

$$u_i = f_i + \underline{O}(h^2) \quad (5)$$

Заметим, что if в схеме аппр-ции $d_i = q(x_i)$, $u_i = f(x_i)$ (точные), то (4) и (5) выполнены заведомо.

If выполнено усл. (1) и p_i' - оцр, то выполнено и усл. (3)

П.о., „основными“ явл-ся усл-а (1) и (2):

$$\frac{a_{i+1/2} - a_{i-1/2}}{h} = p_i' + \underline{O}(h^2),$$

$$\frac{a_{i+1/2} + a_{i-1/2}}{2} = p_i + \underline{O}(h^2)$$

Один из простейших векторов $a_{i+1/2}, a_{i-1/2}$ удовлетворяющий усл-м:

$$a_{i+1/2} = \frac{p_{i+1} + p_i}{2},$$

$$a_{i-1/2} = \frac{p_i + p_{i-1}}{2},$$

$$p(x_i) = p_i.$$

Действительно,

$$\frac{a_{i+1/2} - a_{i-1/2}}{h} = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2h} = p_i' + O(h^2) - \text{как}$$

центр. производная

$$\begin{aligned} \frac{a_{i+1/2} + a_{i-1/2}}{2} &= \frac{p_{i+1} + 2p_i + p_{i-1}}{4} = \\ &= p_i + \frac{h^2}{6} p_i'' + O(h^4) + \frac{2p_i + p_i - h p_i' + O(h^2)}{4} = p_i + O(h^2) \end{aligned}$$

П.Н. Аппроксимация краевого усл-я 3-го пор-ка

Рассмотренная схема имеет 2й пор-к аппр-ции с учетом аппр-ции кр. усл-й 1го рода — она точная и на общ. пор-к аппр-ции не влияет.

If χ -ся зад. с кр. усл-ми 1го или 2го рода, то они д/сохранения общ. 2го пор-ка аппр-ции должны также быть аппроксимированы со 2ым пор-ком

χ краев. зад. с краев. усл-ми 3го рода.

$$\begin{cases} -(pu') + qu = f & 0 < x < 1, \\ \alpha u'(0) + \beta u(0) = \gamma, \quad u(1) = g_1 \end{cases}$$

Д/ур-а схема 2го пор-ка готова.

Аппроксимируем кр. усл-я. Заметим, что очевидн. аппр-ция $\alpha \frac{y_1 - y_0}{h} + \beta y_0 = \gamma$

имеет 1ый пор-к $\Rightarrow$ вся схема будет иметь 1ый пор-к, что нас не устраивает.

Построим аппр-цию 2го пор-ка методом баланса

Интегрируем ур-е на отрезке $[0, \frac{h}{2}]$:

$$-p\left(\frac{h}{2}\right)u'\left(\frac{h}{2}\right) + p(0)u'(0) + \int_0^{h/2} qu dx = \int_0^{h/2} f dx \quad (*)$$

$\exists \alpha \neq 0, p(x) \geq c_0 > 0 \Rightarrow$ кр. усл-я $\alpha u'(0) + \beta u(0) = \gamma \Leftrightarrow p(0)\alpha u'(0) + p(0)\beta u(0) = p(0)\gamma$
эквивалентны $p(0)u'(0) + \frac{p(0)\beta}{\alpha} u(0) = \frac{p(0)\gamma}{\alpha}$

Тогда: $p(0)u'(0) = \alpha u(0) - g_0$, где $\alpha = -\frac{p(0)\beta}{\alpha}, g_0 = -\frac{p(0)\gamma}{\alpha}$

Подставим $p(0)u'(0)$ в (*):

$$-p\left(\frac{h}{2}\right)u'\left(\frac{h}{2}\right) + \alpha u(0) - g_0 = \int_0^{h/2} (-qu + f) dx$$

Аппроксимируем это ур-е след. образом:

$$-p_{i+1/2} \frac{y_{i+1} - y_0}{h} + \alpha y_0 - g_0 = (f(0) - q(0)y_0) \frac{h}{2} \text{ или:}$$

$$-p_{i+1/2} \frac{y_{i+1} - y_0}{h} + (\alpha + q(0) \frac{h}{2}) y_0 = f(0) \frac{h}{2} + g_0, \text{ где}$$

$$p_{i+1/2} = \frac{p_1 + p_0}{2}, \text{ например.}$$

Положим, что это аппр-ция 2-го
пор-ка: $\psi_i = -p_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_0}{h} + (\alpha + q(0) \frac{h}{2}) u_0 - f(0) \frac{h}{2} -$

$$\begin{aligned} -g_0 &= -\left(p_0 + \frac{h}{2} p'_0 + O(h^2)\right) \left(u'_0 + \frac{h}{2} u''_0 + O(h^2)\right) + \\ &+ (\alpha + q(0) \frac{h}{2}) u_0 - f(0) \frac{h}{2} - g_0 = -p_0 u'_0 - \frac{h}{2} p'_0 u'_0 - \\ &- \frac{h}{2} u''_0 p_0 + \alpha u_0 + q(0) \frac{h}{2} u_0 - f(0) \frac{h}{2} - g_0 + O(h^2) = \\ &= \underbrace{[-p_0 u'_0 + \alpha u_0 - g_0]}_{=0 \text{ (в силу кр. усл-я)}} + \frac{h}{2} \underbrace{[-p'_0 u'_0 - u''_0 p_0 + q(0) u_0 - f(0)]}_{=0 \text{ (в силу ур-я)}} + \\ &+ O(h^2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Действительно построена аппр-ция 2-го пор-ка

В рез-те можно сформулировать 2 ∇ -ы для построенной схемы:

$$\left[\begin{aligned} &-(a_{i+1/2}(y(x)) \alpha_{i+1} + q_i y_i = f_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ &-p_{1/2} y_{x,0} + (\alpha_0 + q_0 \frac{h}{2}) y_0 = f_0 \frac{h}{2} + g_0, \\ &y_N = g_1 \end{aligned} \right]$$

$\Downarrow_1$ $\exists p(x) \geq c_0 > 0, q(x) \geq c > 0, x_0 > 0$, тогда имеет место быть априорная оц-ка:

$$\|y\|_C \leq \frac{|g_0|}{|x_0|} + |g_1| + \frac{1}{c} \|f\|$$

$\Downarrow_2$ $\exists p(x) \geq c_0 > 0, q(x) \geq c > 0, x_0 > 0$, тогда построенная разност. схема сх-са к реш-ию дифф-го ур-я со сх-тью $O(h^2)$, if $u^{(4)} \in C[0,1]$
Док-ва $\Downarrow_1$ и $\Downarrow_2$ аналогичны соответс-

$\Downarrow$ п.1 Зл.6 // 23 июня